

模擬講義：理系センスを社会に生かせ

最も「良い」答えを
うまく計算するには？

塩浦昭義

東京工業大学 経営工学系 准教授

shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

<http://www.soc.titech.ac.jp/~shioura/index-j.html>

この講義の内容

講義の目的:

講師の研究テーマ「**離散最適化**」を知ってもらう

- 離散最適化問題とは？
 - 最も「**良い**」答えを求める問題
- 離散最適化の研究とは？
 - 最も「**良い**」答えを**うまく計算**する方法を考える

具体例の共通点

- 選択肢は、バラバラな「もの」の組合せ
- 幾つかの選択肢の中から、ある基準に関して最も「良い」ものを求めたい

離散最適化問題と呼ぶ

- 自宅の最寄り駅から大岡山駅までの鉄道の最短(時間)経路は？

- 選択肢: 路線の組合せ
- 基準: 時間 → 最小に

- 滞在時間300分: どのイベントに参加すると、最も満足？

- 選択肢: 参加するイベント
- 基準: 参加イベントの満足度 → 最大に

- 参加イベントが10件に決定

→ どの順番で訪問すると、歩く距離が最小？

- 選択肢: イベント訪問の順番
- 基準: 総移動距離 → 最小に

離散最適化問題

- 選択肢は、バラバラな「もの」の組合せ
整数値で与えられることも
- 幾つかの選択肢(解)の中から、
ある基準に関して最も「良い」ものを求める

「良い」選択肢を
具体的に計算
することが必要

- 離散最適化 --- 離散最適化問題に関する研究分野
とくに、問題を解く手順(アルゴリズム)について研究

離散最適化問題 \leftrightarrow 連続最適化問題

実数に関する最適化問題

例: $0 \leq x \leq 10$ の範囲で

$f(x) = (x - 2)x(x + 6)$ の
最大値を計算せよ

(離散)最適化は色々な場面で役立つ

- すべての人・ものは、常に「最適化」している！
- **経営工学**
 - 製品の生産計画の効率化 --- コスト最小化, 期間最小化
 - 投資の効率化 --- 最も確実に, 利益を最大化
- **経済学**
 - オークションにおける最適な品物の配分
- **工学**
 - 自動車の動きを希望通りにコントロールする
 - 高層タワーのデザイン: できるだけ頑丈な構造にする
- **情報科学・情報工学**
 - 検索キーワードに最もふさわしい文書を見つける
 - 画像を最も綺麗に処理する・加工する

経営工学・経済学
以外でも重要！

離散最適化問題を解くのは簡単？

- 離散最適化問題の選択肢(解)は**有限個** → 有限時間で解ける
- 例1: どのイベントに参加すると, 最も満足するか?
 - イベント会場: 約200か所 → 組合せは 2^{200} 通り
- 例2: 10の参加イベント: どの順番で訪問すると, 歩く距離が最小?
 - 10か所を訪問する順番: $3,628,800$ 通り

→ 最も良い選択肢(最適解)を

見つけるのは簡単?

- 人間の力だけではとても大変
- コンピュータを使っても限界がある

訪問地点数 n	訪問する順番 $n!$
10	3,628,800
20	2.4×10^{18}
30	2.7×10^{32}

京コンピュータを
使っても
10億年以上必要!

離散最適化の研究

「良い」選択肢を短時間で求めるには
上手な計算方法が必須

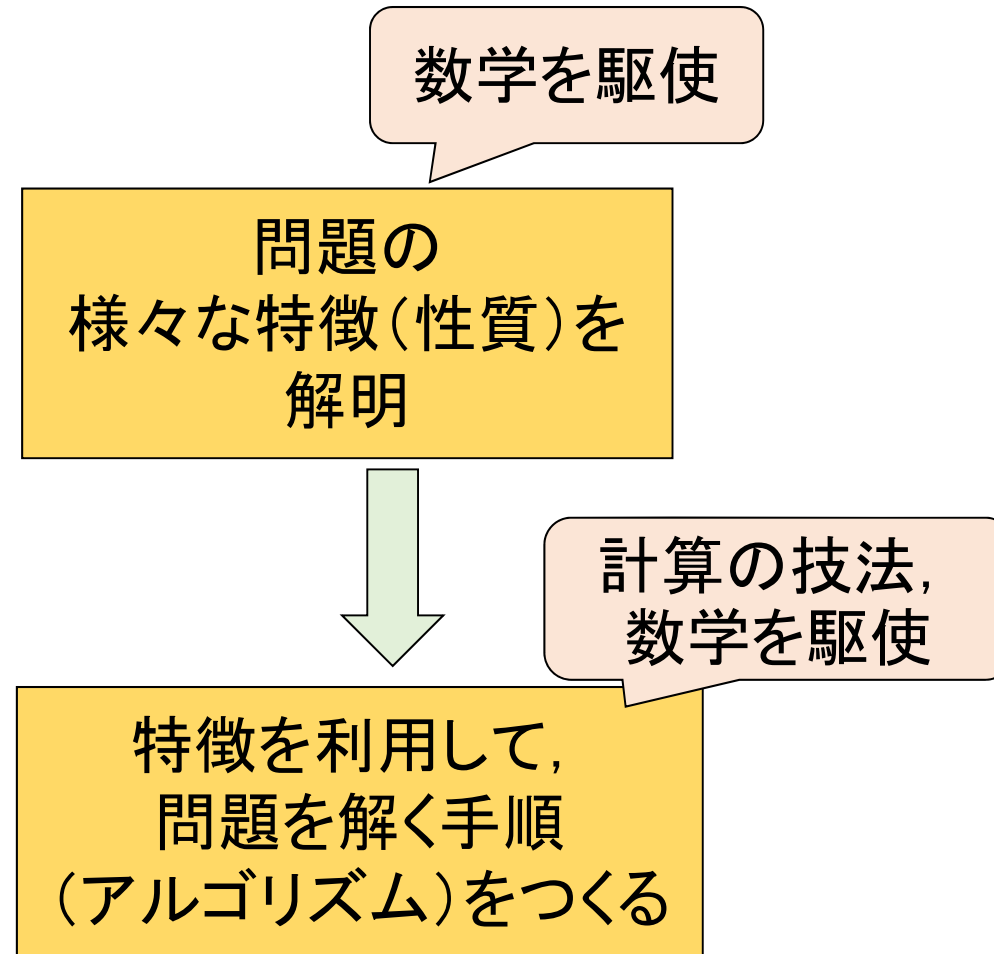
研究の目的

- 「良い」選択肢を短時間で求める上手な計算方法を見つける
 - 最も「良い」選択肢(最適解)を見つける
 - それが難しい→まあまあ「良い」選択肢(近似解)を見つける
- 「良い」選択肢を, できるだけ短時間で計算する

離散最適化問題の解き方

最小全域木問題を例として

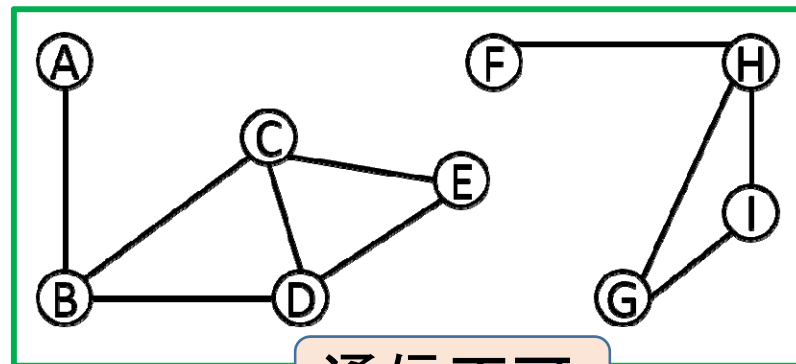
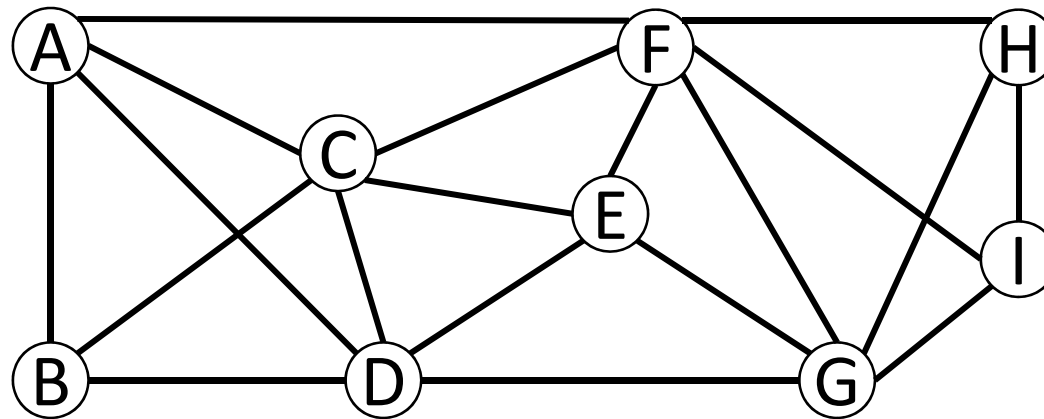
離散最適化問題を解くときの流れ



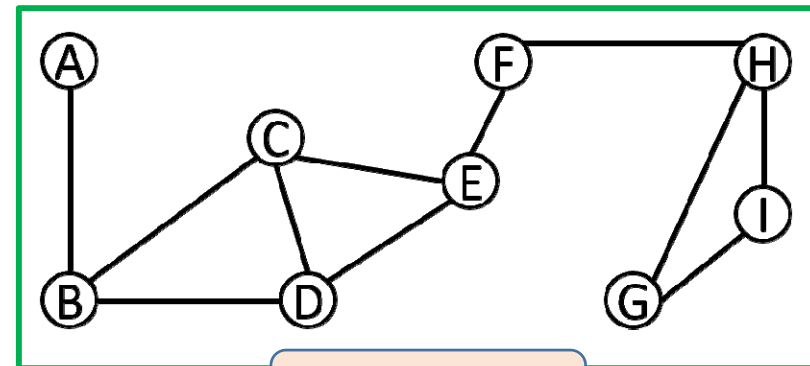
通信ネットワークの構築

- 大学内の通信用ネットワークを構築したい
 - 地点 A, B, ..., I をケーブルで接続, 互いに通信したい
 - 直接ケーブルで接続できるところ, できないところがある
 - 複数のケーブルでつながっていても可

接続可能な
地点



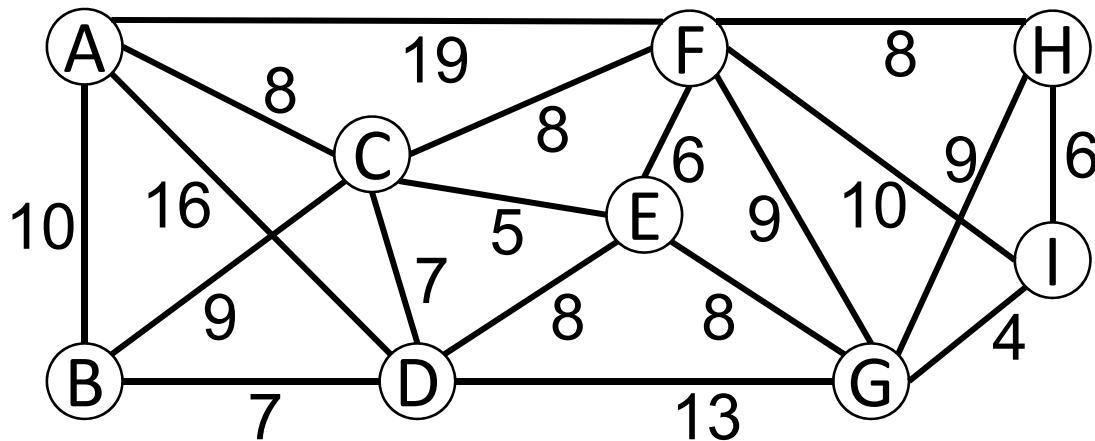
通信不可



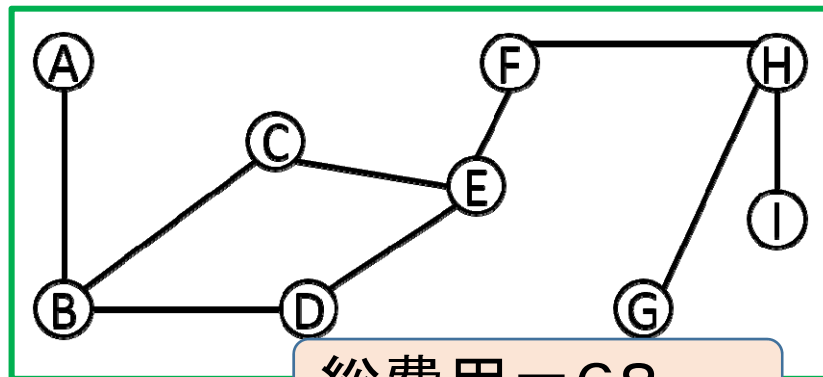
通信可能

最小全域木問題

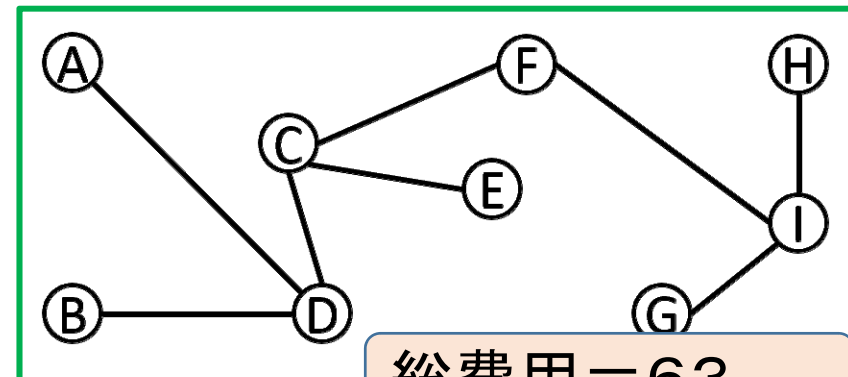
- 大学内の通信用ネットワークを構築したい
 - 各ケーブルの設置には費用が必要
 - 通信可能なネットワークを, 出来るだけ少ない総費用でつくりたい
→ 費用最小のネットワークを求める問題(最小全域木問題)



各ケーブル
の設置費用



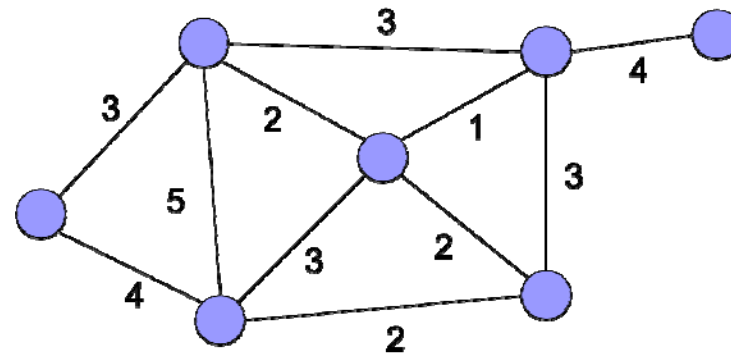
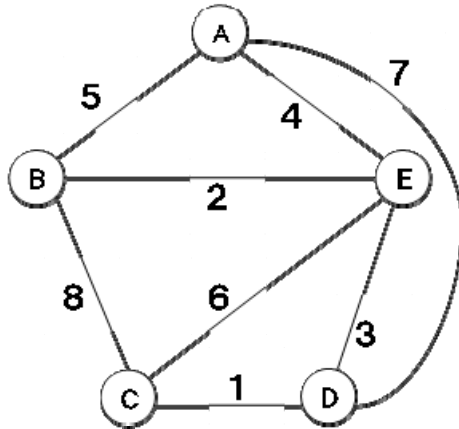
総費用 = 68



総費用 = 63

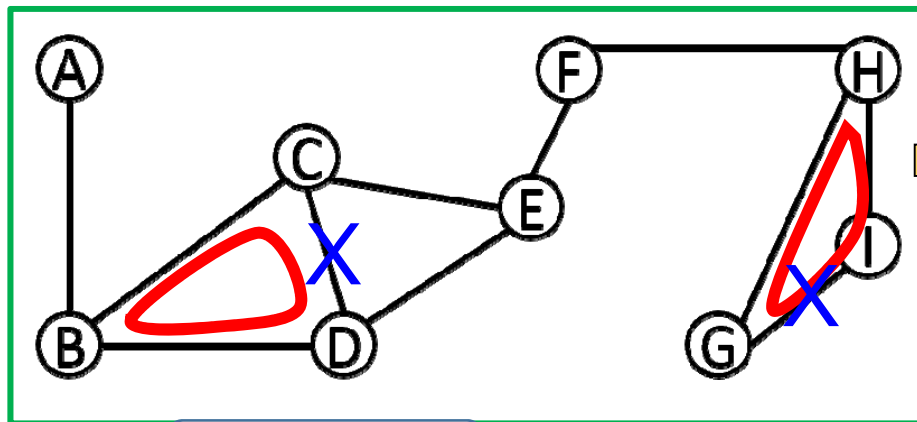
演習問題

- 次の最小全域木問題を解いてください
(費用最小のネットワークを求めてください)

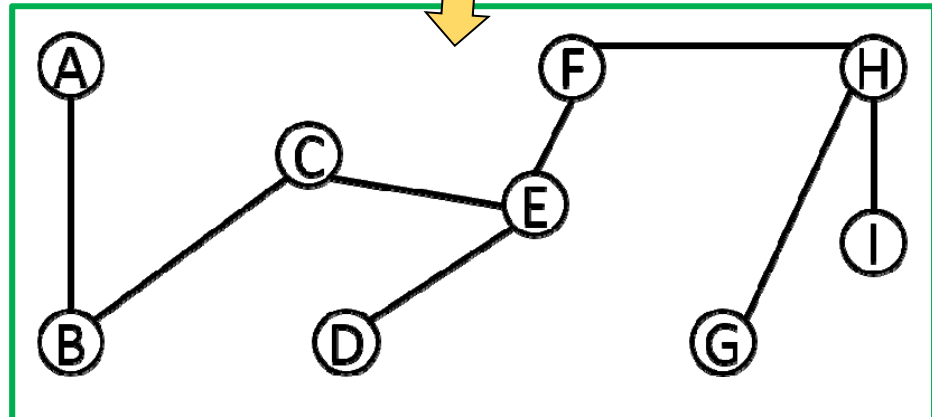
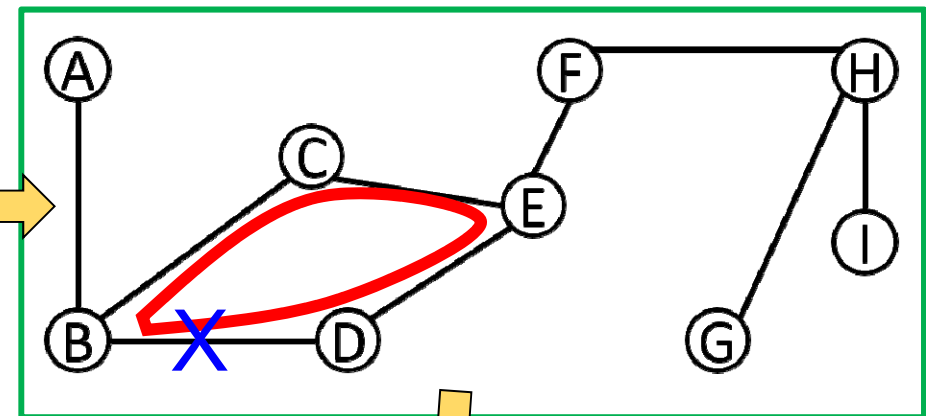


性質1: 無駄なケーブル

- 通信できればOK
 - 無駄なケーブルはできる限り省く
 - **ケーブルで一周できる** → 周上の各地点に2系統の通信路
→ ケーブルを**ひとつ削除しても通信可**

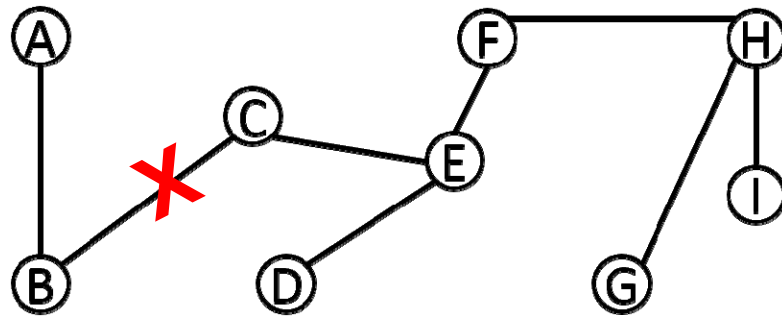


通信可能

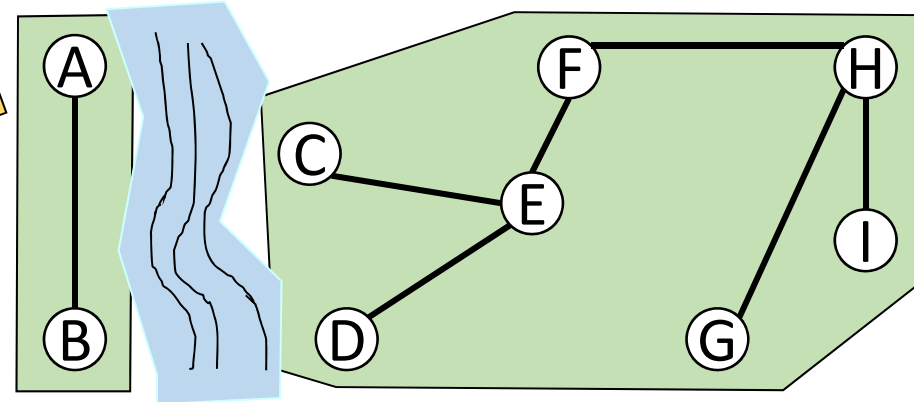


性質2: ケーブルの入れ替え可能性

- 無駄のないネットワークから ケーブルをひとつ削除 → 通信不可に
- 別のケーブルをうまく選んで追加 → 再び通信可能に！

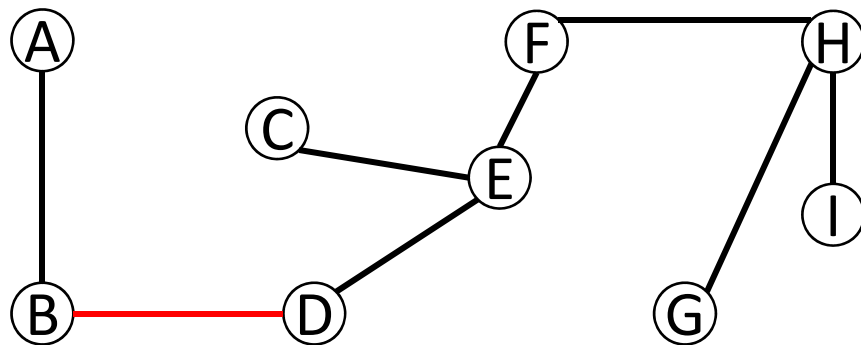


無駄のないネットワーク



ケーブル削除

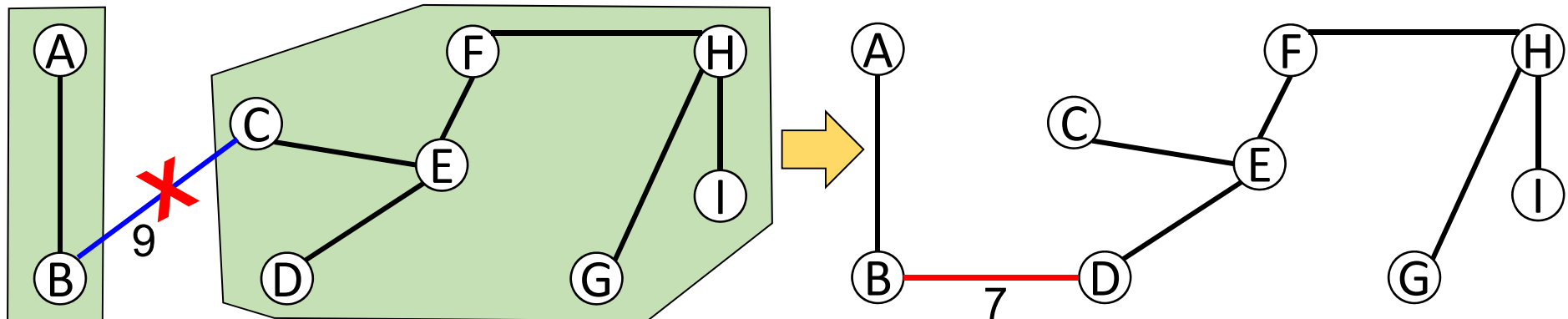
→ ネットワークは2つに分断



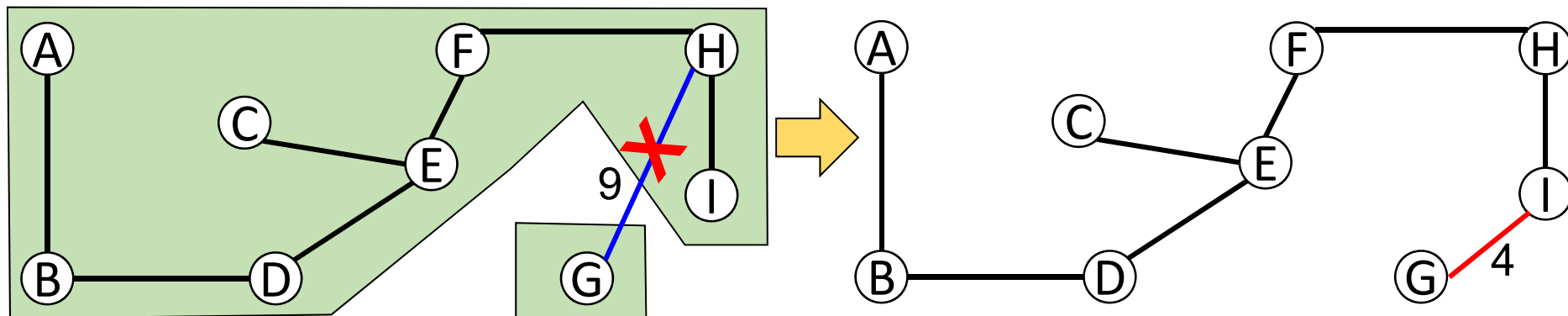
2つをつなぐケーブル1つを追加 → 通信可能に

アルゴリズム1: ケーブルを繰り返し交換

- 性質2により, ケーブルの交換が可能
- 交換して総費用を繰り返し削減 → 最小費用のネットワーク



総費用 2 減少

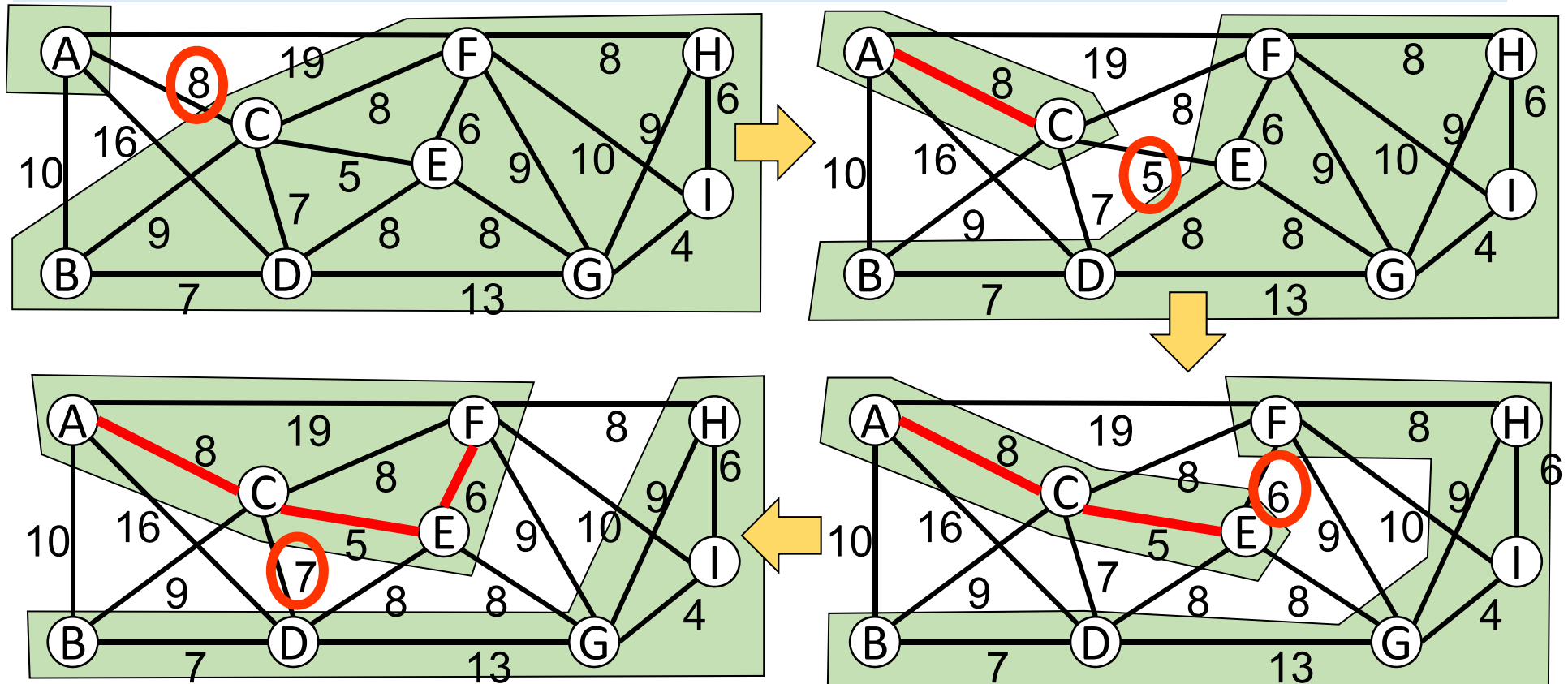


総費用 5 減少

- 有限回の繰り返しで終了. しかし, 繰り返し回数が大きくなる可能性

アルゴリズム2: 安いケーブルを順に追加

- 性質3を利用, 最小費用ネットワークに含まれるケーブルを検出
- 木が成長するように, ケーブルを繰り返し追加

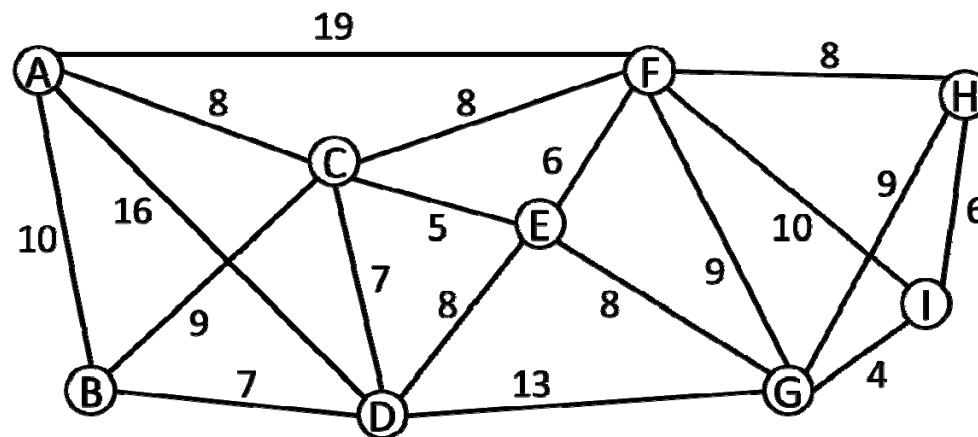
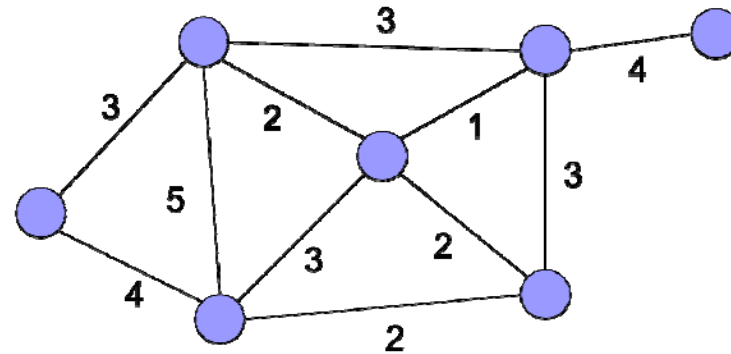
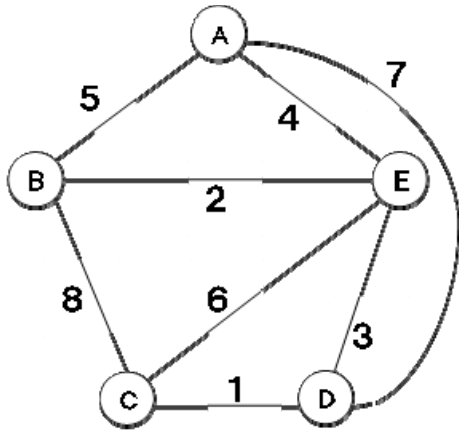


- (地点の数) - 1 回の繰り返しで終了

地点の数が大きくても,
短時間で計算終了!

演習問題

- 次の最小全域木問題を解いてください
(費用最小のネットワークを求めてください)



大事なこと

- 紹介したアルゴリズム自体は, 誰でも思いつきそう
 - でも, 「最適解を必ず求める」保証はできるか?
- 性能保証のないアルゴリズムは, 安心して使えない
 - 「ほとんどの場合, うまくいきそう」ではダメ
 - ユーザからの信頼を得られない
- 今回のアルゴリズム: 数学的な性質を元に構築
 - 最適解を必ず求める証明付き ← 数学による100%の保証
 - 誰にでもできるわけではない → **専門家の役割**

さいごに：講師の具体的な研究テーマ

- 世の中には数多くの離散最適化問題が存在する
 - 時代の流れと共に、新しい問題を解く必要性
 - デジタル画像の処理
 - 携帯電話での通信
 - Web 広告の適切な掲載, など
- より複雑な離散最適化問題
 - 本日の問題例：評価尺度が「足し算」で表される
費用の和, 所要時間の和, 満足度の和, . . .
 - 最近の問題例：評価尺度が「足し算」で表現できない
例：参加イベントの組合せ
ダブルスの良いペアの組合せ

さいごに：講師の具体的な研究テーマ

- どのような問題ならば、「うまい」解法が存在するのか？
 - 選択肢の全体(解の集合), および評価尺度の構造を解析
 - 「解きやすい」問題に共通する構造を明らかに
 - キーワード: 離散凸

